Números Racionales en la Escuela Elemental

Diego Pareja Heredia. ***Universidad del Quindío***

"*Preferiría descubrir una simple ley causal, a ser el rey de Persia*." **Demócrito**[1]

Resumen

Se introducen aquí los operadores *producto* y *cociente* a fin de introducir el conjunto de los números racionales a partir del conjunto de los números enteros. Teniendo ya los racionales en su representación decimal se define operaciones internas como son la suma y el producto. La división aparece como un aditamento extra al introducir el inverso multiplicativo de un número racional.

Abstract

Set operators like *product* and *quotient* on the set of integers are introduced to create rational numbers. With decimal representation in **Q** we can define addition and multiplication as inner operations. Division in **Q** appears as a surplus when we define the multiplicative inverse of a rational number.

Introducción

Este artículo pretende ser un aperitivo matemático para los profesores que aspiren a mirar en forma diferente la enseñanza de las matemáticas elementales con criterio avanzado desde el punto de vista de una formación integral. Aquí se mezclan conceptos e ideas modernas de los dos últimos siglos en el campo del álgebra, el análisis y áreas como física y filosofía. El enfoque general de mi aproximación a estos temas tiene una filosofía más inclinada al pitagorismo que al platonismo. La época que estamos viviendo, donde el computador y el micro chip invaden nuestras vidas, es una época de gran intercambio de información digital, cuya esencia radica en el principio de Pitágoras de que todo es número.

Contrasta lo anterior con el enfoque de Platón para quien la aparición de inconsistencias en la tesis de Pitágoras con relación a los irracionales obligaba a buscar la solución a los problemas de inconmensurabilidad en la geometría. Su ideario en este enfoque lo desarrolla Euclides en su gran obra *Los Elementos*, obra que jugó un papel importante en el desarrollo

[1] Frase citada por Karl R. Popper en: *The Open Society and its Enemies. Vol. 1. Plato.* Princeton University Press, 1971. Pag. 186.

de las matemáticas en los últimos dos milenios, pero que, por razón de la aparición de las geometrías no euclidianas, el álgebra abstracta, el análisis y la topología ha venido opacándose, y en la actualidad no necesariamente tiene que ser el eje de la educación matemática. Dentro del enfoque platonista, en mis conferencias de epistemología, habíamos introducido los números racionales ligados a los haces de rectas paralelas en el plano. Este recurso de mirar los racionales es ilustrativo para descubrir como las matemáticas permean distintos aspectos de la realidad física y de la especulación teórica[2].

En anteriores artículos hemos introducido intuitivamente, siguiendo el método heurístico de Polya, conjuntos como el de los números naturales y el de los números enteros. El método es genético en esencia, partiendo de lo más simple a lo más complejo. Aquí suponemos tener a mano los números enteros, simbolizados con la letra **Z**, para llegar a los números racionales, notados a partir de aquí con la letra **Q**. Los números racionales, como parte de los números algebraicos, los hemos descrito en otro artículo[3], en el proceso hacia la solución general de la ecuación lineal del tipo $px + q = 0$, donde p y q son enteros y $p \neq 0$. Aquí usaremos operadores aplicados a los enteros, para extender **Z** a un conjunto donde tenga cabida los llamados números fraccionarios o quebrados.

A lo largo de nuestras charlas sobre educación matemática hemos estado en contacto con conjuntos infinitos. Aquí ocurre lo propio con nuestros operadores que llevan conjuntos infinitos en conjuntos infinitos, aunque siempre enumerables. El primer conjunto no enumerable que se insinúa en esta exposición será el conjunto de los números reales.

Operador Producto y Operador Cociente

Nuestro primer operador aplicado a **Z**, será aquel que convierte cada entero en el conjunto de todos sus múltiplos, donde el primer factor será un número del conjunto, {0, 1, 2,...} de números naturales y el segundo factor se escoge en **Z**. A este operador lo llamaremos *operador producto*, y lo notaremos como P_n^1. Lo que hace P_n^1, es convertir cada entero z en la clase: $\{n \cdot z$, con n en $\mathbf{N}$ y z en $\mathbf{Z}\}$, que llamaremos clase producto. Por ejemplo, para los casos de $n = 0$, $n = 1$ y $n = 2$, tendríamos:

$P_0^1\, \mathbf{Z} = 0{\cdot}\mathbf{Z} = \{0\}$

$P_1^1\, \mathbf{Z} = 1{\cdot}\mathbf{Z} = \mathbf{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,\ldots\}$

$P_2^1\, \mathbf{Z} = 2{\cdot}\mathbf{Z} = \{\ldots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6,\ldots\}$.

Para un a arbitrario en los números naturales, tendríamos:

$P_a^1\, \mathbf{Z} = a{\cdot}\mathbf{Z} = \{\ldots, -3a, -2a, -a, 0, a, 2a, 3a,\ldots\}$. [4]

---

[2] Ver mis notas de Epistemología en: http://www.matematicasyfilosofiaenelaula.info/Epistemologia%202009/El%20problema%20de%20la%20Inconmensurabilidad..pdf

[3] *The Birth of Algebraic Numbers* en: http://matematicasyfilosofiaenelaula.info/articulos/THE_BIRTH_OF_ALGEBRAIC_NUMBERS.pdf

[4] Al restringirnos a los números naturales, el proceso conduce a las tablas de multiplicar que aprendimos de memoria en la escuela elemental. Estas clases, conocidas como coclases, tienen estructura de grupo aditivo.

Cuando construíamos los números naturales en forma dinámica,[5] decíamos que, para llegar hasta *a*, partiendo de 0, debíamos dar *a* pasos; primero 1, luego 2 y así sucesivamente hasta llegar al punto marcado con *a*. Esto significa que tomando a 1 como unidad de medida, la distancia entre 0 y *a* es precisamente *a* veces 1. Ahora podríamos preguntarnos si la distancia a recorrer es *a* ¿cuánto debe medir cada paso y cuántos pasos habrá que dar para llegar a *a*?, es decir, resolver la ecuación $lx = a$, para l y x. Aquí, l es la longitud de cada paso y x es el número de pasos a dar para llegar hasta *a*. Esto, en la aritmética tradicional es un problema de división, más exactamente, $l = a \div x = a/x$, y, $x = a \div l$. El cociente a/x se denomina quebrado o fraccionario, donde *a* es el numerador y *x* es el denominador. Por ejemplo, si al medir con un metro encontramos que cada paso mide 40 centímetros y la distancia a recorrer es de 4 metros, o, 400 centímetros, entonces la pregunta es: ¿cuántos pasos debemos dar para alcanzar los 4 metros? La respuesta se encuentra contando de cuarenta en cuarenta hasta llegar a 400. Así: 40, 80, 120, 160, 200, 240, 280, 320, 360, 400. O sea hay que dar 10 pasos. La solución la encontramos entonces, en el seno de la clase producto $P^1_{40} = \{\ldots, -80, -40, 0, 40, 80,\ldots\}$.

Los números del tipo a/x, conocidos como racionales, incluyen a los números enteros y a los números naturales y pasaremos a definirlos en forma general, a través de operadores.

… -3 -2 -1 **0** ½ 1 2 3 …

Fig. 1 Los números enteros arreglados a lo largo de una recta de longitud infinita. Del cero a la derecha aparecen los enteros positivos y a la izquierda los negativos. Si entendemos como un paso el ir de 0 a 1, medio paso estará situado justo en la mitad entre 0 y 1. Este punto medio lo denotamos como ½.

Operador Cociente

Si en las clases producto P^1_m descartamos $m = 0$, podemos pensar en definir la clase cociente P^1_n/ P^1_m (Se lee: P^1_n partido P^1_m). Esta clase es por definición:

$$P^1_n/ P^1_m\, \mathbf{Z} = n\cdot\mathbf{Z}/m\cdot\mathbf{Z} = \{kn/km,\ k \text{ entero positivo}\},\ \text{para } n \text{ y } m \text{ enteros con } m \neq 0.$$

Para $n = 0$, definimos $P^1_0/ P^1_m\, \mathbf{Z} = 0\cdot\mathbf{Z}/m\cdot\mathbf{Z} = \{0\}$.

Por ejemplo si escogemos $n = 1$ y $m = 2$, la clase cociente $P^1_1/ P^1_2\, \mathbf{Z}$ es

$$P^1_1/ P^1_2\, \mathbf{Z} = 1\cdot\mathbf{Z}/2\cdot\mathbf{Z} = \{½, 2/4, 3/6, 4/8,\ldots\}.$$

Lo que tienen de común los miembros de este conjunto (el *logos* o la razón, de los Pitagóricos), es precisamente lo que llamaremos el número ½ (siempre el numerador es la mitad del denominador). Estas clases cociente tienen propiedades interesantes. En la escuela tradicional cada elemento en esta clase se llama una *razón* y la igualdad de dos razones en esa clase se conoce como una *proporción*. Por ejemplo en la clase cociente descrita arriba, podemos hablar de la proporción 2/4 : 3/6 (léase, "dos es a cuatro como tres

[5] Ver mi artículo, *Aproximación a los Números Enteros en la Escuela Elemental*, en: http://matematicasyfilosofiaenelaula.info/articulos/AproximacionEnterosEscuelaElemental.pdf

es a seis"). La lección que aprendemos de estas clases es que cada elemento en la clase puede expresarse de infinitas maneras, como puede verse para el número ½, el que se puede representar como 2/4, 3/6, 6/12, etc. En conclusión todos los elementos en estas clases son iguales o sea son formas distintas de representar el mismo número. Estas clases son además clases de equivalencia en el sentido que los elementos en ellas satisfacen las propiedades *reflexiva*, *simétrica* y *transitiva*.

El criterio para saber si p/q y r/s forman una proporción o si están en la misma clase es que se cumpla que $ps = qr$. Para el caso de 2/4 y 3/6, el criterio se verifica porque $2·6 = 4·3$, esto es: 12 = 12, lo cual es cierto. Cuando se verifica que esto se cumple, uno puede concluir que, las razones o elementos son miembros de la misma clase cociente. Por ejemplo 7/3 y 14/6, cumplen el criterio de que $7·6 = 3·14$, así, los dos elementos pertenecen a la misma clase cociente $\mathrm{P}^1{}_7/\ \mathrm{P}^1{}_3$, de todos los elementos equivalentes a 7/3 y podemos afirmar que 7/3 : 14/6.

El conjunto de todas las clases cocientes definidas arriba constituye el conjunto de los números racionales.

Hablando de operadores, el operador Q que transforma a **Z** en los números racionales lo definimos de acuerdo a las siguientes igualdades:

$$\boxed{\mathrm{Q}\mathbf{Z} = \mathrm{P}^1{}_n/\ \mathrm{P}^1{}_m\ \mathbf{Z} = n\mathbf{Z}/m\mathbf{Z} = \{kn/km\} = \mathbf{Q}}$$

Donde k recorre los enteros positivos y n y m son enteros con m distinto de cero. Esta clase determinará unívocamente el *número racional n/m*. Definimos al racional "0" como la familia $\{0/km$, k entero distinto de cero$\}$.

En la enseñanza tradicional de la aritmética es costumbre llamar a los números racionales n/m, fraccionarios o quebrados. Los números fraccionarios en su forma tradicional han caído en desuso y ahora es normal presentarlos como fracciones decimales o como porcentajes. Por ejemplo,

3/7 = 30/70 = 300/700 =… = 0.42857, Aprox.= 42.9%

15/8 = 150/80 = 1500/800 = 1.875, Aprox. = 187.5%

Sin embargo, los números racionales son números como cualesquier otro y con todo el derecho a existir; así, 3/7 es 3/7 y ya. Si se quiere saber en dónde está gráficamente, podemos decir que está cerca a ½ pero que alrededor de él hay infinitos más números.

Fracciones Decimales

Cuando en la definición de número racional sustituimos a k por 10^k, el conjunto que resulta es otra forma de representar a los números racionales. En este caso una definición alterna de **Q** es:

$$\boxed{\mathbf{Q} = P^d{}_n/\ P^d{}_m\ \mathbf{Z} = \{10^k n/10^k m, \text{ donde } k \text{ recorre todos los enteros no negativos}\}}$$

Así aparece la representación decimal de los números racionales. Por ejemplo, para $n = 1$ y $m = 2$, esta definición nos da que ½ es

½ = $\{10^k/2\cdot 10^k$; k recorre los enteros no negativos$\}$ = $\{1\cdot 10^0/2\cdot 10^0$, 10/20, 100/200,…$\}$

Cada elemento del conjunto arriba tiene la forma $10^k/2\cdot 10^k = (10/2)\cdot(10^{k-1}/10^k) = 5\cdot(1/10)$. Faltaría ver qué es 1/10. En el caso dinámico mencionado arriba es la longitud de cada paso cuando hay que dar 10 pasos para llegar a 1.

En la escuela tradicional 1/10 es: 1 dividido por 10, o un décimo, lo que en lenguaje comprensible significa descomponer la unidad en diez partes y de ellas tomar una. Esta última frase se sintetiza en un símbolo muy corto: "0.1", que leemos cero punto uno. Estos procesos de dividir la unidad por 10, 100, 1000, y en general, por potencias de 10 se conocen como fracciones decimales y ahora son parte del lenguaje universal. Así entonces, aparecen las fracciones decimales: 0.1, 0.01, 0.001, etc., que leemos: un décimo, un centésimo, un milésimo, etc., correspondientes a particionar la unidad en 10, 10^2, 10^3, etc., y tomar una, de esas partes.

Por lo anterior se sigue que ½ = $5\cdot(1/10) = 5\cdot(0.1) = 0.5$. Este último número es la representación decimal de ½ .

Las fracciones que resultan de la definición dada arriba se conocen con el nombre genérico de fracciones decimales.

Por lo anterior todo racional (incluyendo por supuesto, enteros y naturales) se puede asociar unívocamente a una fracción decimal, esto es: para todo racional del tipo n/m hay una fracción decimal d asociada a él y viceversa para toda fracción decimal d se puede encontrar un racional n/m equivalente a ella.

Ejemplo. Hallar la fracción decimal asociada al racional 1923/7. Lo primero es entender a que corresponde 1923/7 en lenguaje decimal. Por la definición de arriba,

1923/7 = $\{1923\cdot 10^k/7\cdot 10^k$, donde k recorre todos los enteros no negativos$\}$ = $\{$1923/7, 19230/70, 19300/700, 1923000/7000,…$\}$.

En la medida que crece k los cocientes se van aproximando a la fracción decimal de infinitas cifras, 274.714285714285714285714285… Si llamamos d a la fracción decimal que le corresponde a 1923/7, tenemos que:

$d = 274.714285714285714285714285\ldots = 2\cdot 10^2 + 7\cdot 10^1 + 4\cdot 10^0 + 7\cdot 10^{-1} + 1\cdot 10^{-2} + 4\cdot 10^{-3} + 2\cdot 10^{-4} + 8\cdot 10^{-5} + 5\cdot 10^{-6} +\ldots = 2\cdot x^2 + 7\cdot x^1 + 4\cdot x^0 + 7\cdot x^{-1} + 1\cdot x^{-2} + 4\cdot x^{-3} + 2\cdot x^{-4} + 8\cdot x^{-5} + 5\cdot x^{-6} +\ldots$

Al cambiar arriba, a 10 por x, encontramos una expresión polinómica muy curiosa por contener infinitos exponentes negativos y que converge al número racional 1923/7. Polinomios con exponentes negativos como estos, guardan gran similitud con los llamados *Polinomios de Laurent* que se estudian en análisis de variable compleja.

Representaciones numéricas para d, como la descrita arriba, se logran gracias a las aplicaciones en los dispositivos celulares. Estos números muestran un patrón uniforme donde las cifras, a partir de determinado lugar, se repiten periódicamente. Ese patrón de repetición se llama precisamente, el período del número racional d, que en nuestro caso es

714285. Esta es una de las características de los números racionales: su representación decimal es periódica.

Notación para la representación periódica de los racionales

De aquí en adelante destacaremos con una barra en la parte superior, el período de una fracción decimal. En el caso cuando 1923/7 = d, esta representación decimal queda como: $d = 274.\overline{714285}$.

Al estudiar los números enteros en pasados artículos, hacíamos énfasis en su representación polinómica decimal. Específicamente, todo entero a se puede expresar en la forma:

$a = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, donde, los a_i, $0 \leq i \leq n$, son dígitos en $\{0,1,\ldots,9\}$ y n es entero no negativo.

En el caso de las fracciones decimales asociadas a los números racionales, esta representación va a contener además, potencias de x negativas. Concretamente si d es la representación decimal del racional r, entonces su representación polinómica decimal tendrá la forma:

$$d = d_n x^n + d_{n-1}x^{n-1} + \ldots + d_1 x + d_0 + d_{-1}x^{-1} + d_{-2}x^{-2} + \ldots + d_{-(m-1)}x^{-(m-1)} + d_{-m}\, x^{-m} + \ldots \quad (*)$$

Donde los coeficientes son dígitos en $\{0,1,\ldots,9\}$ y los subíndices en el primer desarrollo están entre 0 y n, y, en el segundo desarrollo, entre 0 y $-m$. En general para los números racionales existirá un valor para m a partir del cual las cifras empiezan a repetirse periódicamente y así d podrá escribirse como:

$$d = d_n 10^n + d_{n-1}10^{n-1} + \ldots + d_1 10 + d_0 + d_{-1}10^{-1} + d_{-2}\,10^{-2} + \ldots + d_{-(m-1)}10^{-(m-1)} + d_{-m}10^{-m} + \ldots$$

$$= d_n\, d_{n-1}\ldots\, d_1 d_0 \mathbf{.} d_{-1}d_{-2}\ldots d_{-(m-1)}d_{-m}d_{-1}d_{-2}\ldots d_{-(m-1)}d_{-m}\ldots$$

Las cifras primeras que preceden al punto decimal corresponden a la parte entera del número, y las cifras con subíndice negativo están asociadas a la parte decimal del mismo.

La adición y multiplicación de fracciones van a seguir las mismas reglas de estas operaciones entre polinomios, recordando que la suma y la multiplicación en la parte operativa es módulo 10, es decir que, cuando el resultado iguala o sobrepasa a 10, en el orden donde se suma o se multiplica, queda el resto, y pasa una unidad al siguiente orden. Veamos un par de ejemplos que muestran la razón de ser de los algoritmos que aprendimos en la escuela. No es nuestro propósito, tratar de insistir en que las operaciones sigan el curso que se ilustra, se busca, eso sí, justificar cada paso según la teoría que aquí exponemos. Hoy en día pocas personas recurren al papel y al lápiz para hallar el resultado de una operación; lo práctico es usar el teléfono o la calculadora, o mejor, la capacidad de estimación o cálculo que se desarrolla con la práctica.

La suma de $d_1 = 2.7548$ y $d_2 = 18.1789$, en representación decimal y polinómica sería:

$d_1 + d_2 = 2.7548 + 18.1789 = 2 + 7\cdot10^{-1} + 5\cdot10^{-2} + 4\cdot10^{-3} + 8\cdot10^{-4} + 18 + 1\cdot10^{-1} + 7\cdot10^{-2} + 8\cdot10^{-3} + 9\cdot10^{-4} = 20 + 7\cdot10^{-4} + 3\cdot10^{-3} + 3\cdot10^{-2} + 9\cdot10^{-1} = 20.9337$.

Tomemos un caso sencillo para ilustrar la multiplicación, digamos, $d_1 = 4.54$ y $d_2 = 8.2$ en donde el producto es:

$d_1 \cdot d_2 = (4.54)\cdot(8.2) = (4 + 5\cdot10^{-1} + 4\cdot10^{-2})\cdot(8 + 2\cdot10^{-1}) = 8\cdot(4 + 5\cdot10^{-1} + 4\cdot10^{-2}) + (2\cdot10^{-1}) \cdot (4 + 5\cdot10^{-1} + 4\cdot10^{-2}) = 32 + 40\cdot10^{-1} + 32\cdot10^{-2} + 8\cdot10^{-1} + 10\cdot10^{-2} + 8\cdot10^{-3} = 32 + 48\cdot10^{-1} + 42\cdot10^{-2} + 8\cdot10^{-3} = 32 + 8\cdot10^{-3} + 2\cdot10^{-2} + 52\cdot10^{-1} = 32 + 5 + 2\cdot10^{-1} + 2\cdot10^{-2} + 8\cdot10^{-3} = 37.228$.

Cuando se suma fracciones decimales hay que tener en cuenta que cada fracción tiene una parte entera que es suma de múltiplos digitales de potencias positivas de 10 y otra parte que es la suma de decimales de distinto orden, digamos múltiplos digitales de 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, etc.

Aceptemos que las fracciones o quebrados tienen su representación decimal periódica y que nos interesa operar con estos racionales así expresados en lo que tiene que ver con la suma y la multiplicación.

Al asociar a los números racionales fracciones decimales se hace innecesario el aprendizaje de algoritmos para las operaciones básicas entre números fraccionarios o quebrados. Basta entender cómo operar las fracciones decimales.

Inverso Multiplicativo de Un Número Racional

A todo número racional $p \neq 0$, está asociado otro número p^*, con la propiedad de que, $p^* \cdot p = p \cdot p^* = 1$. Al número con esta propiedad lo llamaremos el inverso multiplicativo de p y lo representamos con el símbolo p^{-1}. Por ejemplo el inverso multiplicativo de 2, notado 2^{-1}, es ½, puesto que 2 · ½ = ½ · 2/1 = 1· 2/2 · 1 = 2/2 = 1. Análogamente el inverso multiplicativo de ½ es 2, por la razón de que ½ · 2/1 = (1 · 2)/(2 · 1) = 2/2 = 1.

En general, si $n \neq 0$, su inverso multiplicativo es $1/n = n^{-1}$ y decimos que $n \cdot n^{-1} = n^{-1} \cdot n = 1$. También, si $p = n/m$, su inverso multiplicativo p^{-1} es m/n, porque, $n/m \cdot m/n = (m \cdot n)/(n \cdot m) = 1$, siempre y cuando m y n sean diferentes de cero. Por ejemplo, el inverso multiplicativo de ¾ es 4/3, porque, ¾ · 4/3 =12/12 = 1.

El Caso de la División

En los artículos por mí tratados y dirigidos a la educación básica, el caso de la división no ha sido tocado por considerarlo de una complejidad más allá del desarrollo mental del niño. Los problemas aritméticos que el niño enfrenta en los primeros años pueden ser resueltos con la multiplicación y con su proceso inverso que es la factorización, descrito en varios de de mis trabajos.[6]

Al igual que en los enteros, la resta de números naturales se reduce a la suma del minuendo más el inverso aditivo del sustraendo, también, teniendo como marco de fondo los números racionales, la división en los enteros no es otra cosa que un producto de números racionales; por cuanto naturales y enteros pueden transvasarse a **Q,** y si m y n son enteros,

---

[6] Ver por ejemplo:
http://www.matematicasyfilosofiaenelaula.info/articulos/Numbers_as_a_product_of_Primes.pdf
http://matematicasyfilosofiaenelaula.info/articulos/A_Genesis_of_Natural_Numbers.pdf

con $n \neq 0$, entonces la división de m entre n se define como el producto de m por el inverso multiplicativo de n. Si notamos la división de m entre n como $m \div n$, ésta, la definimos como:

$$m \div n = m \cdot (1/n) = m/n.$$

Sencillamente la división del entero m entre el entero n no es otra cosa que el racional m/n, definido arriba. Entonces, la división en los racionales es una multiplicación del dividendo por el inverso multiplicativo del divisor. Eso es todo. Lo demás, cociente y residuo son aditamentos que no interesan, al proceso educativo, al menos por ahora.

Representación Decimal de los Números Racionales

Por tradición y costumbre, la representación decimal de los enteros, en forma hablada o escrita nos ha hecho creer que los números son esa representación, pero no es así. Los números son abstracciones de la mente humana y pueden tener tantas representaciones como queramos, desde las marcas hechas en piedra por las culturas primitivas hasta las señales digitales que se trasmiten por la red de los dispositivos celulares. Hemos acostumbrado a nuestro cerebro a entender los números en forma decimal y queremos que ellos aparezcan siempre así, por eso cuando alguien dice que hay chance de 7/9 de que llueva, nadie entiende; pero si nos dicen que la probabilidad de que llueva es aproximadamente del 78% si lo entendemos. El número 7/9 es un número como otro cualquiera pero, nos es más fácil captarlo como 0.77…, que corresponde a una fracción decimal.

Una pregunta natural es ¿cómo convertir una fracción corriente como 7/9 a fracción decimal? La respuesta difiere según sea el maestro. El maestro tradicional responde: dividiendo 7 entre 9 de acuerdo al procedimiento popularizado en la edad media. Aquí buscamos responder según nuestra definición de número racional. El número 7/9 está definido por la clase:

$7/9 = P^d{}_7 / P^d{}_9\, \mathbf{Z} = \{7/9, 70/90, \ldots, 700/900, \ldots\}$.

Esta clase contiene todas las expresiones del tipo $7 \cdot 10^n / 9 \cdot 10^n$, entre las cuales está 70/90, 700/900, etc.

Habíamos definido la división de enteros como el producto del dividendo por el inverso del divisor. Entonces el problema de la división se reduce a calcular inversos. En el caso de 7/9, entendido como 7÷9, tenemos que encontrar el inverso de 9, es decir, 1/9. Pero como $1/9 = 0.11111\ldots$ Por lo tanto $7/9 = 7 \cdot 1/9 = 7 \cdot 0.1111\ldots = 0.7777\ldots$ Este es un número racional expresado en forma decimal periódica, de período 7 porque el número 7 se repite infinitas veces. Miremos otro ejemplo.

$123/9 = (x^2 + 2x + 3)/9 = 100/9 + 20/9 + 3/9 = 100 \cdot 0.1111\ldots + 20 \cdot 0.1111\ldots + 3 \cdot 0.1111\ldots$ $= 11.1111\ldots + 2.2222\ldots + 0.3333\ldots = 13.6666\ldots = 123 \cdot 0.1111\ldots =$ Aprox. 13.6667.

La última forma de escribir el decimal es una estimación por exceso. Como en el caso anterior el decimal es periódico, donde el período es 6.

Dividir por 3 es lo mismo que multiplicar por 1/3 = 0.333…; dividir por 5 es lo mismo que multiplicar por 1/5 = 0.2; dividir por 7 es lo mismo que multiplicar por 1/7 = 0.1428571429. Esto nos induce a aceptar que lo que hemos entendido por división es un caso de multiplicación por el inverso del divisor. En consecuencia, aprender a dividir es aprender a encontrar inversos.

Aceptemos que nuestro sistema de representación numérico es decimal, donde a, se puede escribir como $a = a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0$, lo que corresponde a la suma

$$a = a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0 = \sum_{i=0}^{i=n} a_{n-i} x^{n-i} = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

Los símbolos a_n, a_{n-1},…, a_1, a_0, son las cifras para representar a y están escogidas en el conjunto {0, 1, … , 9}. Entonces el problema es encontrar 1/a, el inverso multiplicativo de a.

Empecemos por los números de un solo dígito, 1,2,…, 9. El inverso de 1 es 1 porque 1·1 = 1. El caso de 2 se reduce a encontrar x tal que $2x = 1$, esto es, $x = ½$. El número racional ½, es el representante de la clase {1/2}, en la que está también 10/20 que es igual a 10/(2.10) = (10/2) ·(1/10) = 5·(1/10).

Por lo tanto ½ = 5·(1/10) = 5·(0.1) = 0.5. Esto nos muestra que en lugar de trabajar con ½ podemos trabajar con 0.5. Por esta razón es importante familiarizarnos con las fracciones decimales, que facilitan las operaciones y permiten una mejor comprensión de los procesos involucrados en nuestro análisis.

Un proceso similar se sigue para hallar 1/3.

1/3 = 10/30 = 100/300 = 1000/3000 = …= (1000/3)(1/1000) = …

Puesto que al dividir la unidad en 10, 100, 1000, etc., y tomar 3 partes, quedará siempre un residuo de 1, el proceso no es finito y nos tenemos que contentar con aproximaciones cada vez mejores según el número de divisiones de la unidad. Para el caso de las milésimas, la última expresión queda: 1/3 = (1000/3)(1/1000) = 333·(0.001) = 0.333. Con esto estamos diciendo que el inverso de 3 con aproximación a las milésimas es 0.333. La aproximación a las diez milésimas sería 0.3333 y así sucesivamente. Esto se simplifica usando el simbolismo $0.\overline{3}$, que indica que 3 se repite infinitas veces.

Para el caso del inverso de 4, que es ¼, se procede así: ¼ = 100/400 = (100/4)(1/100) = 25·(0.01) = 0.25. Por lo tanto para verificar, multiplicamos (¼)·(4) = (0.25) ·(4) =1.00 =1.

Veamos el caso de 1/5.

1/5 = 10/50 = (10/5)(1/10) = 2·(0.1) = 0.2.

Esto muestra que el inverso de 5 en forma decimal es 0.2. En efecto 5·(0.2) = 1.0 =1.

Sigamos con 1/6.

1/6 = 10/60 =100/600 = 1000/6000 = … = (1000/6)·(0.001) = … Aprox. (166)·(0.001) = 0.166. Una aproximación por exceso de 1/6 sería 0.1667. El inverso de 6 es un decimal periódico, con período 6 y se simboliza como $0.1\overline{6}$, que significa que el 6 se repite infinitas veces.

Para 1/7 se procede similarmente

1/7 = 10/70 = … = (1000000/7)(0.000001) = Aprox. 142857·(0.000001) = 0.142857.

El valor exacto de 1/7 es el decimal periódico $0.\overline{142857}$.

Para 1/8 encontramos: 1/8 = (1000/8)·(0.001) = 125·(0.001) = 0.125. En este caso la parte decimal es finita, aunque se puede decir que sigue siendo periódica de período 9 y escrita como: $0.124\overline{9}$.

Por ser 1/9 = 10/90 = (10/9)(1/0) = 100/900 = (100/9)(1/100) = 1000/9000 = (1000/9)(1/1000) = … , encontramos que, 1/9 = $0.\overline{1}$. Como antes, el uno después del punto decimal se repite infinitas veces.

Decíamos que 1/10 es igual a 0.1. Sin embargo para estar de acuerdo con la notación de periodicidad, convenimos en afirmar que, 1/10 es $0.0\overline{9}$.

Así podemos continuar con las fracciones decimales para los siguientes inversos. Terminemos este ejercicio con el caso de 1/11.

1/11 = 10/110 = 100/1100 = (100/11)(1/100) = 1000/11000 = (1000/11)(1/1000) = … = 0.0909090909090 … = $0.\overline{09}$.

En general todos los números racionales tienen una representación decimal periódica, en contraste con los números irracionales que no la tienen. Así decimos que los irracionales, como son $\sqrt{2}$ y π, por ejemplo, son aperiódicos. Para el caso de π se conocen muchos procedimientos para hallar más y más cifras decimales, a la fecha uno puede mirar en un dispositivo electrónico (como el teléfono celular, por ejemplo) la cifra decimal que está el lugar un millón de su expansión decimal.

Cuando uno tiene la representación periódica de un número racional puede encontrar su representación en la forma *n*/*m*. En efecto, tratemos de hallar el número racional *x*, a que corresponde el decimal periódico $0.\overline{09}$. Tomemos $x = 0.\overline{09}$ = 0.0909090909090…., entonces, $100x - x = 9.\overline{09} - 0.\overline{09} = 9$. De donde se sigue que, $99x = 9$ y así $x = 9/99$ = $1/11 = n/m$.

Al convertir la llamada división de enteros en un producto del dividendo por el inverso del divisor, tenemos que centrarnos en el cálculo de inversos y así en las fracciones decimales. Por ejemplo dividir 327 por 11 es lo mismo que multiplicar 327 por $0.\overline{09}$, o sea:

$327\div 11 = (327)\cdot(1/11) = (327)\cdot(0.\overline{09}) = (327)\cdot(0.09090909\ldots) = 29.727272\ldots = 29.\overline{72}$.

Estando en los números naturales podríamos definir la división entre ellos, simbolizada como "÷", como un proceso a través del cual dos números *D* y *d*, con $d \neq 0$, llamados dividendo y divisor, engendran dos números, *q* y *r*, conocidos como cociente y residuo de tal modo que:

$$D = qd + r.$$

Esta igualdad vista en los números racionales se convierte en:

$$D/d = q + r/d, \text{ que es equivalente a } D/d - r/d = q, \text{ o, } \frac{D-r}{d} = q.$$

Cuando $r = 0$, se dice que la división es exacta y escribimos: $D = qd$ y concluimos que q y d son factores de D.

No es el propósito de este artículo ahondar en temas como la sustracción y la división y que, como se ha dicho en otras partes, estas operaciones son casos particulares de la adición en enteros o la multiplicación en los números racionales. Es más importante, en nuestro criterio, dar una visión introductoria de las operaciones entre fracciones decimales.

Armenia, Colombia, Marzo de 2018